**SIMULAZIONE 2024**

DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL’ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

***Si risolva uno dei due problemi e si risponda a 4 quesiti.***

**Problema 1**

Considera la funzione

$$f\_{k}\left(x\right)=\frac{x(2x+k)}{x^{2}+k},$$

dove $k$ è un parametro reale non nullo, e indica con $γ\_{k}$ il suo grafico.

1. Determina il dominio della funzione al variare di $k$ e verifica che tutte le curve passano per il punto $O$, origine del sistema di riferimento, e che in tale punto hanno tutte la stessa retta tangente $t$.
2. Dimostra che $γ\_{k}$ e $t$ per $k\ne -4∧k\ne 0$ si intersecano in due punti fissi.

Fissato ora $k=4$, poni $f\left(x\right)=f\_{4}(x)$ e indica con $γ$ il suo grafico.

1. Studia la funzione $f\left(x\right)$ e traccia il grafico $γ$.
2. Determina l’area della regione finita di piano $R\_{1}$ delimitata da $γ$, dal suo asintoto orizzontale e dall’asse delle ordinate, e l’area della regione finita di piano $R\_{2}$ delimitata da $γ$ e dall’asse delle ascisse. Qual è la regione con area maggiore?

**Problema 2**

Considera la funzione

$$f\left(x\right)=\frac{aln^{2}x+b}{x},$$

con $a$e $b$ parametri reali non nulli.

1. Determina le condizioni su $a$ e $b$ in modo che la funzione $f(x)$ non ammetta punti stazionari. Dimostra poi che tutte le rette tangenti al grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa
$x=1$ passano per uno stesso punto $A$ sull’asse $x$ di cui si chiedono le coordinate.
2. Trova i valori di $a$ e $b$ in modo che il punto $F(1;-1)$ sia un flesso per la funzione. Verificato che si ottiene $a=1$ e $b=-1$, studia la funzione corrispondente, in particolare individuando asintoti, massimi, minimi ed eventuali altri flessi, e traccia il suo grafico.

D’ora in avanti considera fissati i valori $a=1$ e $b=-1$ e la funzione $f(x)$ corrispondente.

1. Calcola l’area della regione finita di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x)$, la sua tangente inflessionale in $F$ e la retta di equazione $x=e$.
2. Stabilisci se la funzione $y=\left|f(x)\right|$ soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Lagrange nell’intervallo $\left[1;e^{2}\right]$. Utilizza poi il grafico di $y=\left|f(x)\right|$ per discutere il numero delle soluzioni dell’equazione $\left|f(x)\right|=k$ nell’intervallo $\left[1;e^{2}\right]$ al variare del parametro reale $k$.

**QUESITI**

1. Dato il quadrato $ABCD$ di lato $l$, siano $M$ e $N$ i punti medi dei lati consecutivi $BC$ e $CD$ rispettivamente. Traccia i segmenti $AM$, $BN$ e la diagonale $AC$. Indicati con $H$ il punto di intersezione tra $AM$ e $BN$ e con $K$ il punto di intersezione tra $BN$ e $AC$, dimostra che:

**a.** $AM$ e $BN$ sono perpendicolari;

**b.** $\overset{¯}{HK}=\frac{2\sqrt{5}}{15}l$.

1. Nel riferimento cartesiano $Oxyz$ è data la superficie sferica di centro $O(0;0;0)$ e raggio 1. Ricava l’equazione del piano α tangente alla superficie sferica nel suo punto $P\left(\frac{2}{7};\frac{6}{7};\frac{3}{7}\right)$. Detti $A$, $B$ e $C$ i punti in cui α interseca rispettivamente gli assi $x$, $y$ e $z$, determina l’area del triangolo $ABC$.
2. Andrea va a scuola ogni giorno con lo stesso autobus, dal lunedì al venerdì. Da una lunga serie di osservazioni ha potuto stabilire che la probabilità $p$ di trovare un posto libero a sedere è distribuita nel corso della settimana come indicato in tabella.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Giorno | Lunedì | Martedì | Mercoledì | Giovedì | Venerdì |
| Probabilità $p$ | 10% | 20% | 30% | 20% | 10% |

**a.** Qual è la probabilità $p\_{1}$ che nel corso della settimana Andrea possa sedersi sull’autobus almeno una volta?

**b.** Sapendo che nell’ultima settimana Andrea ha trovato posto a sedere una sola volta, qual è la probabilità $p\_{2}$ che questo si sia verificato di giovedì?

1. Dimostra che il volume massimo di una piramide retta a base quadrata inscritta in una sfera è minore di $\frac{1}{5}$ del volume della sfera.
2. Date le funzioni

$$f\left(x\right)=\frac{a-2x}{x-3}eg\left(x\right)=\frac{b-2x}{x+2},$$

ricava i valori di $a$ e $b$ per i quali i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ si intersecano in un punto $P$ di ascissa $x=2$ e hanno in tale punto rette tangenti tra loro perpendicolari. Verificato che esistono due coppie di funzioni $f\_{1}\left(x\right),g\_{1}(x)$ e $f\_{2}\left(x\right),g\_{2}(x)$ che soddisfano le richieste, mostra che le due funzioni $f\_{1}\left(x\right)$ e $f\_{2}(x)$ si corrispondono in una simmetria assiale di asse
$y=-2$, così come $g\_{1}(x)$ e $g\_{2}(x)$.

1. Determina il valore del parametro $a\in R$ in modo tale che valga:

$$\lim\_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x+ax^{3}}{2x(1-\cos(x))}=\frac{17}{6}.$$

1. Data una generica funzione polinomiale di terzo grado

$$f\left(x\right)=ax^{3}+bx^{2}+cx+d,$$

dimostra che le rette tangenti al grafico in punti con ascissa simmetrica rispetto al punto di flesso $x\_{F}$ sono parallele tra loro.

Considera la funzione di equazione $y=-x^{3}+3x^{2}-2x-1$ e scrivi le equazioni delle rette tangenti al suo grafico γ nei punti $A$ e $B$, dove $A$ è il punto di γ di ascissa $-1$ e $B$ è il suo simmetrico rispetto al flesso.

1. In figura è rappresentato il grafico γ della funzione $f\left(x\right)=x^{4}-2x^{3}+2$.



Trova le tangenti inflessionali di γ, poi verifica che le aree delle due regioni di piano delimitate da γ e da ciascuna delle tangenti sono uguali.