ANNO SCOLASTICO 2016/17

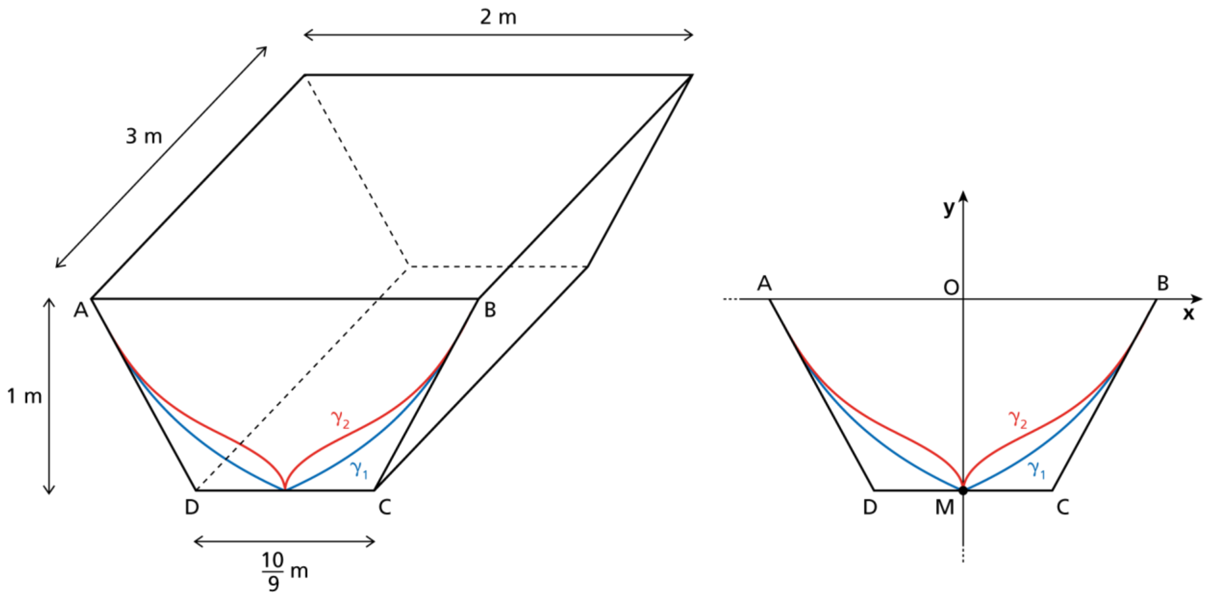
SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL’ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Il candidato risolva uno dei problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1 – Modello in scala

In uno studio di progettazione navale si vuole realizzare il modello in scala ridotta dello scafo di una nave, per sottoporlo a vari test fluidodinamici. Il modello deve essere ricavato da un blocco omogeneo di materiale plastico in forma di prisma retto, di altezza 3 m, avente per base il trapezio isoscele *ABCD*, le cui misure sono riportate in figura.



Le curve γ_1 e γ_2 rappresentano due possibili scelte progettuali per la sezione della superficie esterna. Considera le curve come archi *AB* di grafici di funzioni riferite a un sistema cartesiano ortogonale *Oxy* centrato nel punto medio *O* del segmento *AB*, avente l’asse delle ascisse in direzione *AB* e le unità *x* e *y* espresse in metri.

a) Associa ciascuna delle due curve a una delle seguenti famiglie di funzioni, motivando in modo esauriente la scelta:

$$f(x) = \frac{9(|x| - a)}{9 - b|x|} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^4 + \sqrt{|x|}}{c} + d$$

essendo *a*, *b*, *c*, *d* parametri reali non nulli.

b) Ricava i valori dei parametri *a*, *b*, *c*, *d* in modo che le curve γ_1 e γ_2 possano essere ben rappresentate dagli archi *AB* dei grafici delle funzioni associate basandosi sui dati riportati in figura e tenendo conto che entrambe le curve sono tangenti in *B* alla retta *BC* (e simmetricamente in *A* alla retta *AD*).

c) Avendo dimostrato che i valori dei parametri che soddisfano le richieste precedenti sono

$$a = 1, \qquad b = 5, \qquad c = 2, \qquad d = -1,$$

analizza la derivabilità di ciascuna delle due funzioni così determinate nell'intervallo $-1 \le x \le 1$, classificando la tipologia degli eventuali punti di non derivabilità; rappresenta poi in modo qualitativo, in uno stesso riferimento, le funzioni derivate $f'(x)$ e $g'(x)$ nell'intervallo $-1 \le x \le 1$.

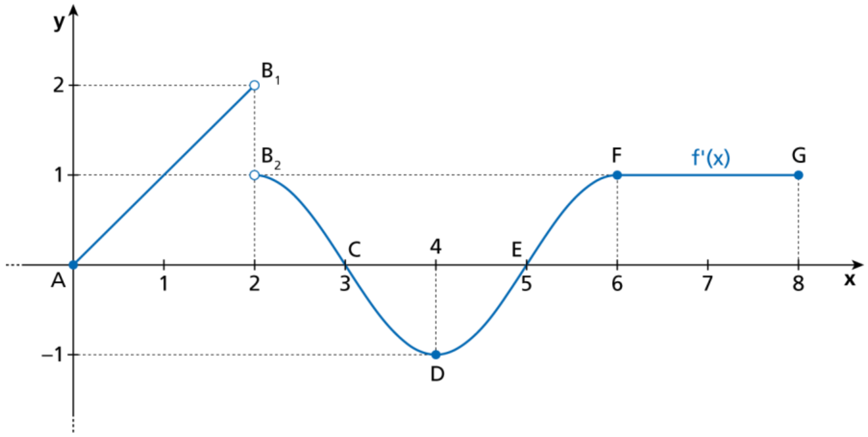
Poiché il materiale plastico scartato nel corso della lavorazione del modello può essere opportunamente riutilizzato, si vuole quantificare il risparmio che evidentemente si realizzerebbe optando per il profilo esterno di tipo γ_2 rispetto al tipo γ_1.

d) Calcola, in percentuale rispetto al volume totale del blocco prismatico iniziale, quanto materiale plastico si recupera in più se si sceglie il profilo di tipo γ_2 invece del tipo γ_1.

e) Per la sezione della superficie interna invece non ci sono dubbi: deve essere una curva γ_3 di equazione $y = kx^4 + h$. Determina i valori di k e h tenendo conto che γ_1, γ_2 e γ_3 devono essere tangenti in A e in B.

Problema 2

Nella figura sottostante è riportato il grafico della funzione $f'(x)$, derivata prima della funzione reale $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[0;8]$.



Del grafico $f'(x)$ sono note le coordinate dei punti evidenziati e le seguenti caratteristiche:

- i tratti AB_1 e FG sono segmenti di retta;
- i punti B_1 e B_2 non appartengono al grafico;
- ciascuno degli archi B_2C, CD, DE, EF individua un sottografico la cui area misura S;
- il tratto B_2F ha un andamento di tipo sinusoidale e si raccorda col tratto FG senza presentare un punto angoloso.

a) Traccia in due distinti riferimenti cartesiani i grafici plausibili delle funzioni $f''(x)$ e $f(x)$ nell'intervallo $[0;8]$, nell'ipotesi che sia $f(0)=0$, motivando in modo esauriente i passaggi. Quanto vale $f(6)$? Qual è il massimo valore assunto da $f(x)$, e in corrispondenza a quale o a quali valori di x viene assunto?

b) Giustifica il fatto che la funzione $f(x)$ presenta un punto di non derivabilità di tipo angoloso nell'intervallo $[0;8]$, quindi determina la misura in gradi, minuti e secondi dell'angolo acuto α individuato dalle tangenti al grafico di $f(x)$ in tale punto angoloso.

c) Date tutte le precedenti ipotesi sulla funzione $f(x)$, indica quali tra le seguenti affermazioni sono vere, motivando la risposta.

1. Come conseguenza del teorema di Lagrange, deve esistere necessariamente almeno un valore $\bar{x}$ nell'intervallo $[0;6]$ tale che $f'(\bar{x}) = \frac{1}{3}$.
2. Poiché $f(x)$ non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;6]$, non può esistere alcun valore $\bar{x}$ interno a tale intervallo tale che $f'(\bar{x}) = \frac{1}{3}$.
3. Benché $f(x)$ non soddisfi tutte le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;6]$, esistono più valori $\bar{x}$ interni a tale intervallo tali che $f'(\bar{x}) = \frac{1}{3}$.

Considera ora la seguente famiglia di funzioni, in cui *a*, *b*, *c*, *d*, *e* sono costanti reali:

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ b - \frac{1}{c}\sin(cx) & \text{se } 2 < x < 6 \\ dx + e & \text{se } 6 \le x \le 8 \end{cases}$$

d) Dimostra che la funzione della famiglia $F(x)$ che riproduce al meglio le caratteristiche note della funzione $f(x)$ si ottiene in corrispondenza dei valori:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 2, \quad c = \frac{\pi}{2}, \quad d = 1, \quad e = -4.$$

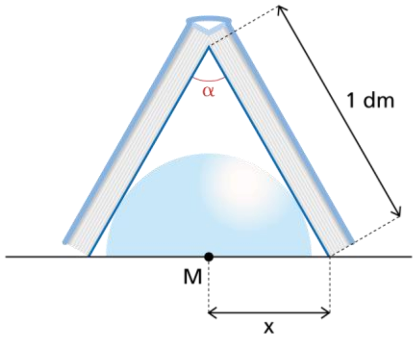
Assumendo quindi, da qui in avanti, che $f(x)$ sia la funzione definita da questi parametri, ricava esplicitamente le espressioni di $f'(x)$ e di $f''(x)$, verificando la coerenza tra le espressioni ottenute e i grafici precedentemente rappresentati.

e) Calcola, nel modo che ritieni più rapido, il valor medio integrale $\bar{f}$ di $f(x)$ nell'intervallo $[0;8]$. Determina poi il volume $\bar{V}$ del cilindro ottenuto dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse del sottografico della funzione costante $y = \bar{f}$ nell'intervallo $[0;8]$ e il volume V del solido che si ottiene ruotando il grafico della funzione $f(x)$ di 360° intorno all'asse delle ascisse. Calcola infine di quanto differisce, in percentuale rispetto a V, approssimata al decimo, il volume V dal volume $\bar{V}$.

Questionario

1. Data la funzione reale $f(x)$, definita e continua in $[1;+\infty)$, sia $F(x)=\int_1^{x^2} f(t)\,dt$.
Sapendo che $y=8x-1$ è la retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di ascissa $x=2$, ricava $f(4)$ e il valor medio integrale di $f(x)$ nell'intervallo $[1;4]$.

2. In figura è rappresentato un piccolo taccuino aperto e rovesciato, con i bordi della copertina a contatto con il tavolo, che poggia su un fermacarte a forma di semisfera. Determina la misura in gradi e minuti dell'angolo α di apertura del taccuino, sapendo che il fermacarte ha il massimo raggio possibile.



3. Data nel riferimento $Oxyz$ la sfera di raggio unitario tangente nell'origine O al piano $y=0$, sia P il punto distinto da O in cui la retta r passante per O e per $A(2;1;0)$ incontra la superficie della sfera. Ricava l'equazione del piano tangente alla sfera nel punto P.

4. Sia OAB la regione R del primo quadrante del riferimento Oxy delimitata dall'arco AB della parabola γ di equazione $y=1-x^2$, con A e B intersezioni di γ con gli assi x e y rispettivamente. Detto P il punto di intersezione tra l'arco di parabola AB e la retta di equazione $5x-6y=0$, ricava il rapporto tra i volumi V_1 e V_2 dei solidi ottenuti per rotazione di $360°$ dei triangoli mistilinei OPB e OPA in cui R risulta divisa dal segmento OP, rispettivamente intorno all'asse y e intorno all'asse x.

5. Discuti la continuità e la derivabilità della seguente funzione reale:

$$f(x)=\begin{cases} |x|^x & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

e calcola, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

6. Nella sua ora di lezione, un professore di matematica interroga da 0 a 3 studenti ogni volta. Per stabilire il numero n di interrogati, lancia due dadi regolari a 6 facce e calcola la somma S dei punteggi ottenuti, quindi determina il resto della divisione fra S e 4; n è uguale a tale resto.
Calcola la probabilità che in una lezione siano interrogati 3 studenti, quindi calcola il numero medio di ore necessario a interrogare tutti i 28 studenti della classe.

7. Date le funzioni:

$$f(x)=\int_0^x \sin t\cdot\ln(t+1)\,dt, \qquad g(x)=\int_0^{2x} t\left(e^t-1\right)dt,$$

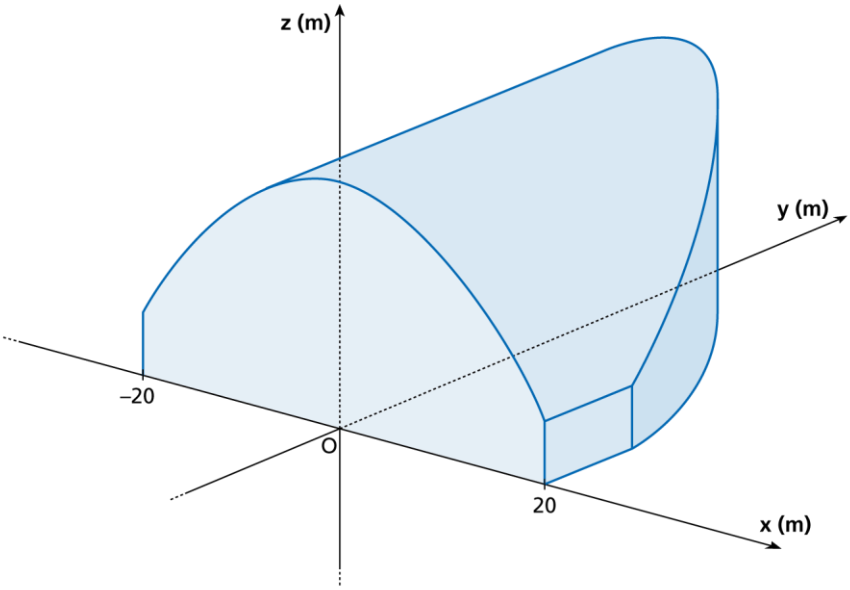
dimostra che i grafici di entrambe sono tangenti all'asse x nel loro punto di ascissa $x=0$, quindi calcola:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}.$$

8. Un architetto sta progettando una nuova concert hall; la pianta dell'edificio è la regione R del piano cartesiano Oxy compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = 40 - \frac{3}{40}x^2,$$

l'asse x e le rette di equazione $x = 20$ e $x = -20$; le sue sezioni con piani ortogonali all'asse x sono rettangoli di altezza $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$.



Rappresenta la regione R e calcola la sua area. Calcola poi il volume complessivo dello stabile.

9. Determina l'espressione analitica della funzione $f(x)$ sapendo che il suo grafico è tangente alla retta di equazione $2x + y = 4$ in un punto del primo quadrante e che la sua derivata prima è $f'(x) = x^3 - 3x$. Rappresenta quindi il grafico di $f(x)$, verificando che è una funzione pari. Dimostra, in generale, che se $f(x)$ è una funzione pari, allora $f'(x)$ è dispari e $f''(x)$ è pari.

10. La funzione $f(x)$ rappresentata in figura è continua e derivabile in **R.** Il suo grafico è tangente all'asse x nell'origine e alla retta t nel punto di flesso A.

a) Traccia il grafico della funzione $f'(x)$, indicando in particolare il dominio, gli zeri, il segno e le coordinate dei massimi e dei minimi.

b) Sapendo che $f(x)$ è una funzione polinomiale di quarto grado, ricava la sua espressione analitica e calcola quindi l'espressione di $f'(x)$; stabilisci infine se la funzione $f'(x)$ così ricavata è in accordo con il grafico disegnato al punto precedente.